SUJET I : Le Trébuchet

1)

$\vec{P}$ est verticale et dirigée vers le bas, sa valeur est : $P = mg = 130 \times 10 = 1\,300\ N$.
$\vec{\Pi}$ est verticale et dirigée vers le haut, sa valeur est $\Pi = \rho_{air} \times V.10^{-3} \times g = 0{,}65\ N$.

2)

Le rapport $\frac{\Pi}{P} = \frac{0{,}65}{1300} = 0{,}5.10^{-3}$ nous permet de dire que la poussée d'Archimède est négligeable.

3)

Dans la chute libre, et en négligeant la poussée d'Archimède, on a d'après la deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$
Donc : $\vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_z \end{pmatrix}$.
Donc $a_x = 0$ et $a_z = -g$.

4)

On a par les relation de trigonométrie : $v_{0_x} = v_0 \cos\alpha$ et $v_{0_z} = v_0 \sin\alpha$.

5)

Par intégration, on a : $v_x(t) = v_{0_x} = v_0 \cos\alpha$ et $v_z(t) = -gt + v_{0_z} = -gt + v_0 \sin\alpha$.

6)

La composante horizontale ne dépend pas de t, donc elle est constante, donc suivant cet axe, le mouvement est uniforme.

7)

Par intégration, on a $x(t) = v_0 \cos\alpha\, t + x_0 = v_0 \cos\alpha\ \ t$
et $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\ \ t + H$.

8)

On peut extraire de la première composante $t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}$ et l'injecter dans la deuxième composante, on a alors :

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 cos\alpha} + H = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 cos^2\alpha} + x\tan\alpha + H$$

9)

$z(x)$ est un polynôme de degré 2, donc le projectile suit une trajectoire parabolique.

10)

α, v_0 et H son les paramètres de lancement qui interviennent dans la trajectoire du projectile.

11)

Si $\vec{v_0}$ est horizontale, alors $\alpha = 0$ et le point de chute est en $z = 0$, on écrit donc :
$0 = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 cos^2 0} + x\tan 0 + H$
Ce qui donne :
$0 = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2} + H$
Donc : $x = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$

12)

En utilisant la relation précédente pour $x = 100$, on a :
$v_0 = x\sqrt{\frac{g}{2H}} = 100\sqrt{\frac{10}{2\times 10}} = 100\sqrt{2} \approx 141\ m.s^{-1}$.

SUJET II : Principe de l'oscilloscope

II.1. Première partie du dispositif : le canon à électrons

II.1.2.

La deuxième loi de Newton appliquée au système $\{un\ électron\}$ (qui ne subit que la force électrique) dans le référentiel terrestre supposé galiléen nous permet d'écrire : $m\vec{a} = \overrightarrow{F_{él}} = q\overrightarrow{E_0}$. Donc $\vec{a} = \frac{q\overrightarrow{E_0}}{m}$

II.1.2.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\ d'où\ \vec{v} = v_z\vec{k} + \overrightarrow{c_1} = \left(\frac{eE}{m}t\right)\vec{k} + \vec{0}\ donc\ v = \frac{eE}{m}t = \frac{eU_0}{mD}t$

II.1.3.

Par définition, $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ et par intégration :

$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{eU_0}{2mD}t^2\right)\vec{\imath}\ donc, z = \frac{eU_0}{2mD}t^2$

II.1.4.

Au niveau de l'anode, la coordonnée est $z_A = D$.

Et $t_A = \sqrt{\frac{2mD^2}{eU_0}} = D\sqrt{\frac{2m}{eU_0}}$ et comme $v_A = \frac{eU_0}{mD}t_A = \frac{eU_0}{mD}\sqrt{\frac{2mD^2}{eU_0}} = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$.

II.2. Première partie du dispositif : le canon à électrons

II.2.1.

D'après le principe d'inertie entre A et O aucune force étant appliquée à l'électron, celui-ci est en mouvement rectiligne uniforme. Donc $v_0 = v_A$.

II.2.2.

La deuxième loi de Newton s'écrit $m\vec{a} = \overrightarrow{F_{el}} = q\vec{E} = -e\vec{E}$ d'où $\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$ puis $a = \frac{eU}{md}$. Donc :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eU}{md} \\ a_z = 0 \end{cases}$$

II.2.3.

Changeons d'origine des dates. Les conditions initiales sont maintenant les suivantes : $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{0}$.

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_{0_x} = 0 \\ \frac{eU}{md}t + v_{0_y} = \frac{eU}{md}t \\ v_{0_z} = v_0 \end{cases}$$

II.2.4.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \frac{eU}{2md}t^2 + y_0 = \frac{eU}{2md}t^2 \\ v_0 t \end{cases}$$

II.2.5.

$t = \frac{z}{v_0}\ donc\ y(t) = y\left(\frac{z}{v_0}\right) = y = \frac{eU}{2mdv^2}z^2 (portion\ de\ parabole)$

II.2.6.

$y_s = y(l) = \frac{el^2}{2mdv_0^2}U$

SUJET III : Service au tennis

I. Première partie du dispositif : le canon à électrons

I.1.1.

Poussée d'Archimède et forces de frottements négligeables, donc la balle ne subit que son poids $\vec{P}$ vertical, vers le bas et de valeur $P = 58{,}0.10^{-3} \times 9{,}81 = 0{,}569\ N$.

I.1.2.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la deuxième loi de Newton appliquée à la balle conduit à :

$$\vec{P} = m\vec{a} \;\Leftrightarrow\; m\vec{g} = m\vec{a} \quad d'où:\ \vec{a} = \vec{g}$$

On en déduit les coordonnées du vecteur accélération :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

I.1.3.

Par intégrations successives, on obtient :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x = c_1 \\ v_y = -gt + c_2 \\ v_z = c_3 \end{cases}$$

$$d'après\ les\ conditions\ initiales: \overrightarrow{v_0} = \begin{cases} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}\ donc\ \vec{v}(t)\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -gt \\ v_z = 0 \end{cases}.$$

$De\ la\ même\ manière, on\ obtient$:

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t) = v_0t + c_4 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_5 \\ z(t) = c_6 \end{cases}\ et\ avec\ les\ conditions\ initiales, on\ écrit:\ \overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t) = v_0t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

I.1.4.

A chaque instant, on a $z(t) = 0$, le mouvement se fait donc dans le plan (xy).

I.1.5.

On extrait $t = \frac{x}{v_0}$ que l'on injecte dans $y(t)$ pour obtenir :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + H$$

Qui se réécrit :

$$y(x) = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2} + H$$

Remarque : correspond à une parabole à concavité négative (ce qui est cohérent avec la trajectoire de la balle de tennis).

II. <u>Qualité du service</u>

II.2.1.

La balle passe au-dessus du filet si pour $x = OF = 12{,}2\ m$, on a $y(x) > 0{,}920\ m$.

On sait $v_0 = 126\ km.h^{-1}$, ce qui conduit à $y(12{,}2) = 1{,}60\ m > 0{,}920\ m$. La balle passe au-dessus du filet.

II.2.2.

La balle atteint le sol au point $B'(x'_B; y'_B = 0; z'_B = 0)$. Le service est raté si $x'_B > OB$ avec $OB = L = 18{,}7\ m$. Et on a $y(x'_B) = -\frac{1}{2}\frac{gx'_B}{v_0^2} + H = 0 \iff x'_B = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

II.2.3.

Le paramètre frottement avec l'air est en fait important sur la balle de tennis, il se produit l'effet Magnus (*lift*).

SUJET IV – LE CERCLE DES PLANETES DISPARUES

I – Orbite d'Eris

1)

Selon la troisième loi de Kepler, le rapport du carré de la période de révolution T et du cube du demi-grand axe a de l'orbite elliptique est constant : $\frac{T^2}{a^3} = cste$.

2)

Si T_E est supérieure à T_P comme l'indiquent les valeurs numériques, le fait que, d'après la troisième loi de Kepler, les rapports $\frac{{T_E}^2}{{a_E}^3}$ et $\frac{{T_P}^2}{{a_P}^3}$ soient égaux implique que a_E soit supérieure à a_P :
l'orbite d'Eris est plus éloignée du Soleil que celle de Pluton.

II – Découverte de Dysnomia

1) Mouvement de Dysnomia

1.1)

Le référentiel permettant d'étudier le mouvement de Dysnomia autour d'Eris est le référentiel « eriscentique », de centre confondu avec celui d'Eris et d'axes fixes par rapport aux étoiles lointaines.

1.2)

La deuxième loi de Newton appliquée à Dysnomia dans le référentiel ériscentrique s'écrit :
$M_D\vec{a} = \vec{F}_{E/D} = -G\frac{M_E M_D}{R_D^2}\vec{u}_{ED}$ $donc$ $\vec{a} = -G\frac{M_E}{R_D^2}\vec{u}_{ED}$

1.3)

La direction du vecteur accélération est parallèle à la droite passant par les centres de Dysnomia et Eris.
Il est orienté de Dysnomia vers Eris.

1.4)

La distance parcourue par Dysnomia pendant une période de révolution T_D est égale au périmètre de son orbite circulaire $2\pi R_D$. Le mouvement de Dysnomia étaant supposé uniforme, sa vitesse est constante et égale à sa vitesse moyenne : $v_D = \frac{2\pi R_D}{T_D}$.

Or, les deux expressions de l'accélération conduisent à : $\frac{{v_D}^2}{R_D} = G\frac{M_E}{R_D^2}$ ce qui donne : $V_D = \sqrt{G\frac{M_E}{R_D}}$.

La période de révolution de Dysnomia est donc :

$$T_D = \frac{2\pi R_D}{v_D} = 2\pi R_D\sqrt{\frac{R_D}{GM_E}} = 2\pi\sqrt{\frac{{R_D}^3}{GM_E}} \Longrightarrow T_D = 4\pi^2\frac{{R_D}^3}{GM_E}$$

Donc, on obtient $\frac{{T_D}^2}{{R_D}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_E}$ qui correspond à la troisième loi de Kepler.

2) Masse d'Eris

2.1)

D'après la troisième loi de Kepler, $M_E = \frac{4\pi^2{R_D}^3}{G{T_D}^2}$ soit :

$$M_E = \frac{4\pi^2(3{,}60.10^7)^3}{6{,}67.10^{-11}.(1{,}30.10^6)^2} = 1{,}63.10^{22}\ kg.$$

2.2)

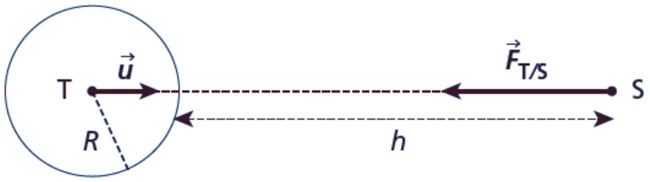
On a $\frac{M_E}{M_P} = 1{,}24$ et la masse de Pluton étant voisine de celle d'Eris qui n'est pas une planète, pareil pour Pluton.

SUJET V – ETUDE DE SATELLITES D'OBSERVATION

I. Envisat : un satellite circumpolaire

1.

Schéma représentatif de l'étude :



On a : $\overrightarrow{F_{T\rightarrow S}} = -G\frac{mM}{(R+h)^2}\vec{u}$ alors :

$F_{T\rightarrow S} = 6{,}67.10^{-11} \times \frac{8\,200\times 5{,}98.10^{24}}{(6{,}38.10^6+800.10^3)^2} = 6{,}34.10^4\ N$

2.

La deuxième loi de Newton appliquée au satellite dans le référentiel géocentrique s'écrit $\overrightarrow{F_{T\rightarrow S}} = m\vec{a}$ donc l'accélération du satellite s'écrit : $\vec{a} = -G\frac{M}{(R+h)^2}\vec{u}$.

3.

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, $\vec{a} = -\frac{v^2}{R+h}\vec{u}$ donc

$\frac{v^2}{R+h} = \frac{GM}{(R+h)^2}$

donc

$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$.

4.

Ce qui donne :

$v = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11}\times 5{,}98.10^{24}}{6{,}38.10^6+800.10^3}} = 7{,}45.10^3\ m.s^{-1} = 7{,}45\ km.s^{-1}$.

5.

Le périmètre de l'orbite du satellite est $2\pi(R+h)$ donc sa période de révolution est

$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi\times(6{,}38.10^6+800.10^3)}{7{,}45.10^3} = 6{,}05.10^3\ s$.

II. Météosat 8 : un satellite géostationnaire

1.

Pour être géostationnaire, un satellite doit avoir une période T égale à la période de rotation propre de la Terre.

2.

D'après la question 1.5, $T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^2}{v^2}$ et d'après la question 1.3., $v^2 = \frac{GM}{R+h}$

donc on peut écrire : $T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{GM}$ ou encore :

$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = K.$

Ce qui donne :

$K = \frac{4\pi^2}{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}} = 9{,}90.10^{-14}\ S.I.$

3.

La relation précédente s'écrit : $R + H = \left(\frac{T_{propre}}{K}\right)^{\frac{1}{3}}$ où $T_{propre} = 1\,436\ min = 8{,}616.10^4\ s.$

$R + H = \left(\frac{(8{,}616.10^4)^2}{9{,}90.10^{-14}}\right)^{\frac{1}{3}} = 4{,}22.10^7\ m = 4{,}22.10^4\ km.$

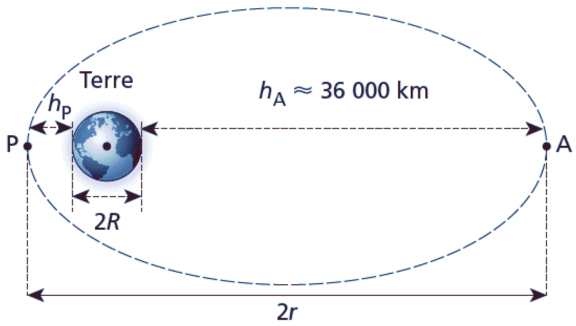
D'où

$H = 4{,}22.10^4 - 6{,}38.10^3 = 3{,}58.10^4\ km.$

4.

4.1.

Schématisons :



D'après ce schéma, $2r = 2R + h_P + h_A$. Donc :

$r = \frac{200 + 2 \times 6{,}38.10^3 + 36\,000}{2} = 24\,480\ km.$

4.2.

En utilisant le résultat de la question II.2., la période de révolution du satellite sur l'orbite de transfert est :

$T = \sqrt{Kr^3} = \sqrt{9{,}90.10^{-14} \times (24\,480.10^3)^3} = 3{,}81.10^4\ s.$

Soit un peu plus de dix heures.

SUJET VI – DECOLLAGE DE LA FUSEE ARIANE 5

III.1. Principe de fonctionnement

III.1.1.

La masse du combustible diminue au cours du temps, donc il faut préciser pour quel instant la valeur est donnée.

III.1.2.

L'éjection des gaz permet la mise en mouvement de la fusée.

III.1.3.

La propulsion de la fusée est possible tant qu'il reste du combustible, donc elle ne peut pas s'élever à n'importe quelle altitude.

III.2. Etude simplifiée du mouvement

III.2.1.

La masse de gaz éjectés est $m_g(t) = M - m(t)$.

III.2.2.

La quantité de mouvement de la fusée à une date t est $\overrightarrow{p_f}(t) = m(t)\vec{v}(t)$.

III.2.3.

Celle des gaz éjectés est $\overrightarrow{p_g}(t) = m_g(t)(\vec{v}(t) + \vec{u})$.

III.2.4.

La quantité de mouvement de l'ensemble constitué de la fusée et des gaz éjectés est donc la somme de ces deux quantités de mouvement, soit :

$\vec{p}(t) = \overrightarrow{p_f}(t) + \overrightarrow{p_g}(t) = m(t)\vec{v}(t) + m_g(t)(\vec{v}(t) + \vec{u}) = M\vec{v}(t) + m_g(t)\vec{u}$.

Cette quantité de mouvement est constante puisque le système est isolé.

III.2.5.

La dérivée de cette quantité de mouvement est donc nulle :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm_g}{dt}\vec{u}.$$

On en déduit donc :

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm_g}{dt}\vec{u}.$$

III.2.6.

D_m est positif car les gaz sortent de la fusée, donc la masse m_g de gaz éjectés augmente.

III2.7.

On a : $\left[\frac{dm_g}{dt}u\right] = \frac{MLT^{-1}}{T} = MLT^{-2}$ qui est bien homogène à une force.

Cette force est orientée dans le sens du mouvement de la fusée : en effet, elle est de sens opposé à $\vec{u}$, vitesse d'éjection des gaz, verticale et vers le bas. La force de poussée est donc verticale et vers le haut.

III.3. Etude plus réaliste

III.3.1.

L'expression de la quantité de mouvement est inchangée, mais elle n'est plus constante car le système, soumis au poids, n'est plus isolé.

III.3.2.

La deuxième loi de Newton s'écrit à présent $\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{g}$, ce qui donne $M\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm_g}{dt}\vec{u} = M\vec{g}$.

Ou encore : $M\frac{d\vec{v}}{dt} = M\vec{g} - D_m\vec{u}$.

III.3.3.

La fusée peut décoller si l'accélération est dirigée vers le haut, donc si $D_m u > Mg$.

Le débit minimum est donc : $D_m = \frac{Mg}{u} = \frac{1\,100.10^3 \times 9,8}{5\,000} = 2,2.10^3\ kg.s^{-1}$.

III.3.4.

Notons M_C la masse initiale de combustible, alors ce débit massique vaut $D_m = \frac{M_C}{T}$.

Donc la durée du décollage correspondante est : $T = \frac{M_C}{D_m} = \frac{1000.10^3}{2,2.10^3} = 4,6.10^2\ s$.

Soit $7\ min\ 40\ s$.