Propagation d'une information

Préliminaire

Etablir que pour tout x de l'intervalle $]-1,+\infty[$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

Objectifs et notations

Ce problème étudie différents modèles de propagation, au cours du temps, d'une information au sein d'une population contenant N individus où N est une entier naturel strictement supérieur à 3. On désignera par le réel t positif la variable représentant le temps.
On suppose qu'à l'instant initial ($t=0$) une seule personne parmi cette population est informée. L'information circule au sein de cette population et lorsqu'une personne est informée à l'instant t elle le reste indéfiniment.
Pour tout réel x, $[x]$ désignera la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif k tel que $k \leq x < k+1$, et la fonction $\ln$ représentera la fonction logarithme népérien.

Partie I : Premier modèle de propagation

Soit C un réel strictement positif. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \dfrac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $u_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.
On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(\Delta) - u_n(\Delta) = C\Delta(1 - u_n(\Delta))$$

On pose $u_0(\Delta) = \dfrac{1}{N}$.

1.a Exprimer $1 - u_{n+1}(\Delta)$ en fonction de $1 - u_n(\Delta)$.

1.b Déterminer l'expression de $u_n(\Delta)$ et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\Delta)$.

2. Soit t un réel fixé strictement positif. Le rapport $\dfrac{t}{\Delta}$ sera également noté t/Δ.

2.a Comparer $\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\Delta$, t et $\left(\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]+1\right)\Delta$. Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]$.

2.b Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} u_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

3. On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t, où t est un réel positif, par $f(t)$, f étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On fait l'hypothèse que l'accroissement instantanée de la proportion de personnes informées est déterminé par l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f'(t) = C(1 - f(t)).$$

Déterminer la fonction f sachant que $f(0) = \dfrac{1}{N}$.

Partie II : Second modèle de propagation

On désigne toujours par C une constante réelles strictement positive. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \dfrac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $v_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.

On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1}(\Delta) - v_n(\Delta) = C\Delta v_n(\Delta).(1 - v_n(\Delta)).$$

On pose $v_0(\Delta) = \dfrac{1}{N}$.

1.a Pour tout entier naturel n, exprimer $1 - v_{n+1}(\Delta)$ en fonction de $1 - v_n(\Delta)$ et de $1 - C\Delta v_n(\Delta)$.

1.b Montrer que la suite $(v_n(\Delta))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{N}, 1\right[$.

1.c Etudier la convergence de $(v_n(\Delta))$ et déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(\Delta)$.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la rapidité de diffusion de l'information.

2.a Montrer que pour tout entier naturel n : $1 - v_{n+1}(\Delta) \le q\big(1 - v_n(\Delta)\big)$ avec $q = 1 - \dfrac{C\Delta}{N}$.

2.b En déduire que $1 - v_n(\Delta) \le \dfrac{N-1}{N} q^n$.

2.c On pose pour tout entier naturel n, $x_n = \dfrac{1 - v_n(\Delta)}{(1 - C\Delta)^n}$.

Etablir que pour tout entier naturel k : $\ln x_{k+1} - \ln x_k = \ln \dfrac{1 - C\Delta v_k(\Delta)}{1 - C\Delta}$

En déduire que $0 \le \ln x_{k+1} - \ln x_k \le \dfrac{C\Delta}{1 - C\Delta} \dfrac{N-1}{N} q^k$.

On pourra exploiter le résultat du préliminaire.

2.d On pose pour tout entier naturel n, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(\ln x_{k+1} - \ln x_k\big)$.

Montrer que la suite (S_n) converge. On pose $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

2.e Déduire des questions précédentes l'existence d'un réel μ strictement positif tel que :

$1 - v_n(\Delta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu(1 - C\Delta)^n$.

On explicitera la valeur de μ en fonction de S et de N.

3. On pose pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{v_n(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 + C\Delta)^n}$.

3.a Montrer que pour tout entier naturel k : $\dfrac{y_{k+1}}{y_k} = 1 + \dfrac{C^2\Delta^2 v_k(\Delta)}{(1 + C\Delta)(1 - C\Delta v_k(\Delta))}$.

3.b En considérant $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln y_{k+1} - \ln y_k$, établir que : $0 \le \ln\left(\dfrac{(N-1)v_n(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 + C\Delta)^n}\right) \le n \dfrac{C^2\Delta^2}{1 - C^2\Delta^2}$.

3.c Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} v_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

4. On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t, où t est un réel positif, par $g(t)$, g étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. On fait l'hypothèse que l'accroissement instantanée de la proportion de personnes informées est déterminé par l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = Cg(t)(1 - g(t)).$$

En considérant la fonction h définie par $h(t) = \dfrac{1}{g(t)}$, déterminer l'expression de $g(t)$ pour tout réel t positif sachant que $g(0) = \dfrac{1}{N}$.