Intégration par la méthode de Gauss

Notations

On note $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'algèbre réelle des fonctions réelles définies et continues sur $[-1,1]$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre réelle des polynômes réels en l'indéterminée X, et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n.

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $m \in \mathbb{N}$, on note $P^{(m)}$ le polynôme dérivé de P à l'ordre m.

On identifiera, polynôme et fonction polynomiale associée.

Partie I

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = \dfrac{n!}{(2n)!} U_n^{(n)}$.

1.a Déterminer le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.

1.b Justifier que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.a En exploitant la formule de Leibniz, établir : $P_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$.

2.b En déduire les valeurs de $P_n(1)$ et de $P_n(-1)$.

3.a Déterminer les racines de U_n ainsi que leur multiplicité.

3.b En exploitant le théorème de Rolle, montrer que P_n possède au moins n racines dans l'intervalle $]-1,1[$.

3.c Le polynôme P_n peut-il avoir d'autres racines que celles évoquées ci-dessus ?
Quelle est la multiplicité des racines P_n ?

4.a Etablir que $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\int_{-1}^{1} P^{(n+1)}(t)Q(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1} P(t)Q^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t .$$

4.b En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0$

Partie II

On reprend les notations de la partie précédente.

On note $a_0, a_1, \ldots, a_n$ les racines distinctes du polynômes P_{n+1}.

1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = \left(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)\right)$.

1.a Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels.

1.b En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ on ait $P(a_i) = f(a_i)$. On notera $P = P_f$ cet unique polynôme déterminé par f.

2. Pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, on pose $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (X - a_k)$.

2.a Pour $i, j \in \{0,1,\ldots,n\}$, calculer $L_i(a_j)$.

2.b Justifier que la famille $\mathcal{C} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.c Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$.
Exprimer les composantes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de P_f dans la base $\mathcal{C}$ à l'aide des valeurs de f et de L_i en a_i.

3. Pour $f \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$, on pose $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ et $J(f) = \int_{-1}^{1} P_f(t)\mathrm{d}t$.

3.a Montrer que $J(f)$ peut s'écrire $J(f) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i f(a_i)$
avec des réels μ_i qu'on exprimera en fonction des L_i et des a_i.

3.b Observer que $J : f \mapsto J(f)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$.

3.c Montrer que si f est une fonction polynomiale de degré inférieur à n alors $J(f) = I(f)$.

3.d On suppose maintenant que f est une fonction polynomiale de degré inférieur à $2n+1$.
En réalisant la division euclidienne de f par P_{n+1}, montrer qu'on a encore $J(f) = I(f)$.

3.e Etablir que les μ_i sont strictement positifs.

4. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$. On pose $M = \sup_{t \in [-1,1]} \left| f^{(2n+2)}(t) \right|$.

4.a Exprimer la partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre $2n+1$ en 0.
Celle-ci sera notée $T_{2n+1}(f)$.

4.b En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f établir que : $\left| I(f) - I(T_{2n+1}(f)) \right| \leq \dfrac{2M}{(2n+3)!}$.

4.c Obtenir de même : $\left| J(f) - J(T_{2n+1}(f)) \right| \leq \dfrac{2M}{(2n+2)!}$.

4.d En déduire une majoration de $\left| I(f) - J(f) \right|$.