Etude d'une bijection

On considère la fonction f définie par la relation $f(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x/2}$.

1.a Sur quels intervalles la fonction f est-elle définie ? continue ? dérivable ?
Préciser la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

1.b Dresser le tableau de variation de f.

1.c Justifier que la courbe représentative de f présente une inflexion en un point d'abscisse α à préciser.

1.d Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en α avec l'axe (Ox).

1.e Représenter f et sa tangente en α en prenant des unités égales à 2 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.

2.a Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0,1]$ vers l'intervalle $\left[0,1/\sqrt{\mathrm{e}}\right]$ et que l'application réciproque correspondante, notée φ, est continue.

2.b Dresser le tableau de variation de φ.

2.c Justifier que φ est dérivable sur $\left]0,1/\sqrt{\mathrm{e}}\right[$.

2.d Etudier la dérivabilité de φ en 0 et en $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

2.e Déterminer un équivalent simple de φ au voisinage de 0.

3.a Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ vers l'intervalle $\left]0,1/\sqrt{\mathrm{e}}\right]$. On note ψ l'application réciproque correspondante.

3.b Dresser le tableau de variation de ψ.

3.c Déterminer un équivalent simple de ψ au voisinage de 0.

4. On considère l'application composée $g=\varphi\circ\psi^{-1}$ au départ de $[1,+\infty[$.
Dresser le tableau de variation de g.