Puissances d'une matrice

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Soit I la matrice carrée identité d'ordre n, $I = \text{diag}(1,1,\ldots,1)$.

Soit O la matrice carrée d'ordre n nulle.

Soit U la matrice carrée d'ordre n constituée uniquement de « 1 », $U = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,j} = 1$.

Partie I

Soit E le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par I et U.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$.
2. Pour p entier naturel non nul donné, calculer U^p.
3. Montrer que E est stable pour la multiplication.
4. Soit $A = \alpha . I + \beta . U$ un élément de E.

4.a Calculer A^p en fonction de α, β, p, I et U, p désignant un entier naturel non nul.

4.b Calculer $\det A$.

4.c A quelle(s) condition(s) portant sur α et β, A est-elle inversible ?
Calculer alors l'inverse A^{-1} en fonction de α, β, I et U.

Partie II

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est U.

Soit i l'identité de $\mathbb{R}^n$. Soit $p_0 = \dfrac{1}{n} u$ et $p_1 = i - \dfrac{1}{n} u$.

1.a Montrer que p_0 et p_1 sont des projecteurs.

1.b Comparer $\ker p_0, \operatorname{Im} p_0$ avec $\ker p_1, \operatorname{Im} p_1$.
Donner la dimension de ces espaces

1.c Soit $\mathcal{B}'$ une base adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p_0 \oplus \ker p_0$.
Former les matrices représentatives de p_0 et p_1 dans cette base $\mathcal{B}'$.

2. Soit A_0 la matrice de p_0 dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, A_1 la matrice de p_1 dans cette même base.
Montrer que (A_0, A_1) est une base de $E = \text{Vect}(I, U)$.

3. Soit $A = \alpha . I + \beta U$ un élément de E, β étant non nul.

3.a Donner les composantes λ et μ de A dans la base (A_0, A_1).

3.b Calculer A^p en fonction de λ, μ, p, A_0 et A_1.
Retrouver l'expression du I.4.a.