Polynômes orthogonaux

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2

Partie I

On note I l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme

$$\varphi(P) = ((X^2-1)P)'' = (X^2-1)P'' + 4XP' + 2P .$$

1.a Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b Former la matrice représentative de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.a Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
(i) l'équation $\varphi(P) = \lambda.P$ possède un polynôme unitaire solution,
(ii) $\ker(\varphi - \lambda.I) \neq \{0\}$
(iii) $\det(\varphi - \lambda.I) = 0$.

2.b Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Justifier que l'équation $\varphi(P) = (k+1)(k+2)P$ possède un polynôme unitaire solution, que celui-ci est unique et qu'il est de degré k.
Ce polynôme sera noté P_k.

2.c Justifier que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a Déterminer P_0 et P_1.

3.b Déterminer les coefficients de X^{k-1} et de X^{k-2} dans P_k lorsque $k \in \{2, \dots, n\}$.

Partie II

On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[-1, 1]$.
Pour $f, g \in E$, on pose :

$$\psi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\mathrm{d}t .$$

On identifiera le polynôme P avec la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$ définie sur $[-1, 1]$.

1.a Montrer que ψ est un produit scalaire sur E.
On munit E de ce produit scalaire et on note désormais $(f \mid g)$ le produit scalaire des éléments f et g.

1.b Observer que $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a $(XP \mid Q) = (P \mid XQ)$.

2. Pour $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^2$, on pose $\phi(f) = ((x^2-1)f(x))'' = (x^2-1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x)$.

2.a Montrer que si $f, g \in E$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ alors $(\phi(f) \mid g) = (f \mid \phi(g))$.

2.b Montrer que pour la suite de polynômes $P_0, P_1, ..., P_n$ définis dans la partie I, on a la propriété :
$\forall (k, \ell) \in \{0, 1, ..., n\}$, $k \neq \ell \Rightarrow (P_k \mid P_\ell) = 0$.

2.c Soit $k \in \{0, 1, ..., n\}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Etablir l'implication $\deg Q < k \Rightarrow (P_k \mid Q) = 0$.

3. Soit $k \in \{2, ..., n\}$.

3.a Montrer que le polynôme $P_k - XP_{k-1}$ est de degré au plus $k-1$ et qu'il est orthogonal a tout polynôme de degré inférieur ou égal à $k-3$.

3.b En déduire que $P_k - XP_{k-1}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de P_{k-1} et de P_{k-2}.

3.c En utilisant I.3.b, établir $P_k = XP_{k-1} - \dfrac{(k-1)(k+1)}{(2k-1)(2k+1)} P_{k-2}$.

3.d Calculer P_2 et P_3.

4. Soit $k \in \{0,...,n\}$

4.a Montrer que $(P_k \mid P_k) = (P_k \mid X^k)$.

4.b En calculant de deux manières $(\varphi(P_\ell) \mid X^{\ell+2})$ exprimer $(P_\ell \mid X^{\ell+2})$ en fonction de $(P_\ell \mid P_\ell)$.

4.c Former une relation permettant, pour $k \geq 2$, de calculer $(P_k \mid P_k)$ à partir de $(P_{k-1} \mid P_{k-1})$ et $(P_{k-2} \mid P_{k-2})$.