Polynômes de Legendre

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réel en l'indéterminée X et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal n.
On identifiera polynôme et fonctions polynomiales associées définies sur $[-1,1]$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\frac{\mathrm{d}^k P}{\mathrm{d}x^k}$ la dérivée k ème d'un polynôme P.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions polynomiales définies sur I par :

$$U_n(x) = (x^2-1)^n \text{ et } P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{\mathrm{d}^n U_n}{\mathrm{d}x^n}(x)$$

En particulier, avec les conventions usuelles : $U_0(x) = P_0(x) = 1$.
A toute fonction polynomiale P, on associe le polynôme $L(P)$ définie sur I par :

$$L(P)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right)$$

Partie I

Pour $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $(.\mid.)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   Dans tout le problème, on suppose $\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire et on note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
2. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. On note L_n la restriction de l'endomorphisme L au départ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a Montrer que L_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.b Calculer $L_n(1)$, $L_n(X)$ et $L_n(X^k)$ pour tout $2 \le k \le n$.

3.c Former la matrice de L_n relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit $P,Q \in \mathbb{R}[X]$. Observer que $(L(P) \mid Q) = (P \mid L(Q))$.

Partie II

1.a Calculer directement P_1, P_2 et P_3.

1.b Montrer que P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient a_n de x^n dans P_n.

1.c Justifier que $P_0, P_1, \ldots, P_n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer : $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right)$, établir que :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

   et en déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

3.a Vérifier les relations :

(1) : $U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0$,

(2) : $(x^2 - 1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0$.

3.b En dérivant $n+1$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie :

(3) : $P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$,

(4) : $L(P_n) = n(n+1)P_n$.

3.c En exploitant la relation (4) et le résultat de la question I.4, établir que si $m \neq n$, $(P_n \mid P_m) = 0$.

4.a Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P_{n+1} \mid Q) = 0$.

4.b En introduisant un polynôme Q de la forme $\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$ montrer que le polynôme P_{n+1} possède exactement $n+1$ racines distinctes, toute dans l'intervalle $]-1,1[$.

5.a Montrer que $(P'_{n+1} \mid P_n) = (n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$.

5.b A l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\|P_n\|^2 = 2 - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P'_n(x)\mathrm{d}x$.

5.c En déduire que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

6. Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on note $d(P,F)$ la distance de P au sous-espace vectoriel F .
Calculer $d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X])$.