Polynômes de Bernstein

Soit n un entier naturel. On note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers allant de 1 à n.
On appelle polynômes de Bernstein de degré n les polynômes réels:

$$B_{n,k}=\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} \text{ avec } k\in\{0,1,\dots,n\}$$

Dans tout le problème, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée.

Partie I : Polynômes de Bernstein

1. Représenter sur un même graphique les fonctions $x\mapsto B_{3,k}(x)$ pour $k=0,1,2,3$ et $x\in[0,1]$.

2.a Calculer $\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}$. En déduire que pour tout $x\in[0,1]$, $0\le B_{n,k}(x)\le 1$.

2.b Calculer $\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}$, $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)B_{n,k}$ puis $\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}$.

3. Exprimer $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$ pour $n\ge 1$.

4. Etablir que la famille $(B_{n,k})_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $B(P)=\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}$.

5.a Montrer que B est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.b Déterminer le noyau de B. Qu'en déduit-on ?

Partie II : Théorème de Weierstrass

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose P_n la fonction définie par : $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)$.

1. Calculer $P_n(x)$ lorsque $f(x)=1$, $f(x)=x$ et $f(x)=x^2$.
Vérifier qu'à chaque fois $P_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$ pour tout $x\in[0,1]$.

2. On se propose de généraliser le résultat ci-dessus au cas général $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue.

2.a Calculer $\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}(x)$.

2.b Soit $x\in[0,1]$ et $\varepsilon>0$. La fonction f étant continue en x :

$$\exists\alpha>0\,,\forall t\in[0,1]\ :\ |x-t|\le\alpha\Rightarrow|f(x)-f(t)|\le\varepsilon/2\,.$$

On pose $A=\left\{k\in[\![0,n]\!]/\left|x-\frac{k}{n}\right|<\alpha\right\}$ et $B=\left\{k\in[\![0,n]\!]/\left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\alpha\right\}$.

Montrer que $\sum_{k\in B}B_{n,k}(x)\le\frac{x(1-x)}{n\alpha^2}\le\frac{1}{4n\alpha^2}$.

2.c En déduire que $|P_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2}$ avec $M=\sup_{[0,1]}|f|$.
Conclure que $P_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand $n\to+\infty$

3.a Etablir que $P'_n(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k}(x)$.

3.b En déduire que si f est croissante sur $[0,1]$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est croissante sur $[0,1]$.

Partie III : Courbes de Bézier

Les courbes de Bézier sont couramment utilisées en DAO, car elles permettent de construire des courbes régulières satisfaisant des contraintes géométriques simples.

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

L'utilisateur se donne une famille de $n+1$ points distincts $(P_k)_{0\le k\le n}$.

La courbe de Bézier définit par ces points est la courbe de point courant $M(t)$ ($t\in[0,1]$) déterminé par :

$M(t)$ est le barycentre des points $P_0,P_1,\dots,P_n$ affectés des masses $B_{n,0}(t),B_{n,1}(t),\dots,B_{n,n}(t)$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ en fonction des $\overrightarrow{OP_k}$ est des $B_{n,k}(t)$.

2. Dans le cas $n=3$, on considère les points $P_0\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$, $P_1\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$, $P_2\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ et $P_3\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$.

   Représenter la courbe de Bézier correspondante.

3. On revient au cas général.

3.a Préciser les points $M(0)$ et $M(1)$.

3.b On suppose $P_1\ne P_0$. Montrer que la tangente en $M(0)$ passe par P_1.

De même, lorsque $P_{n-1}\ne P_n$, on observe que la tangente en $M(1)$ passe par P_{n-1}.

Ainsi, lors de la construction d'une courbe de Bézier, l'utilisateur détermine les extrémités et y précise les tangentes.