Noyaux et images itérés d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit u un endomorphisme de E.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, u^p désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (p termes) et u^0 désigne l'endomorphisme identité noté Id.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous notons, $N_p = \ker u^p$ et $I_p = \operatorname{Im} u^p$

1.a Déterminer N_p et I_p lorsque u est un endomorphisme injectif.
On revient au cas général.

1.b Pourquoi N_p et I_p sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1.c Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $N_p \subset N_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

2. On pose $n_p = \dim N_p$ et $i_p = \dim I_p$.

2.a Calculer $n_p + i_p$.

2.b Etablir qu'il existe un plus petit entier naturel r tel que $n_r = n_{r+1}$.

2.c Justifier $r \leq n$.

3. On reprend l'entier r introduit ci-dessus.

3.a Montrer que $N_r = N_{r+1}$ et $I_r = I_{r+1}$.

3.b Plus généralement, observer que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $N_{r+p} = N_r$ et $I_{r+p} = I_r$.

3.c Montrer enfin que $E = N_r \oplus I_r$.

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_p = i_p - i_{p+1}$.
On désire montrer que la suite (δ_p) est décroissante.

4.a Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel D_p tel que $I_p = I_{p+1} \oplus D_p$ et déterminer $\dim D_p$.

4.b Etablir $I_{p+1} = I_{p+2} + u(D_p)$.

4.c En déduire $\delta_{p+1} \leq \delta_p$.