Matrices stochastiques

Notations et définitions

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un entier naturel.

Une matrice $A=(a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{C})$ est dite stochastique ssi

(1) $\forall i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, $a_{i,j}\in\mathbb{R}^+$,

(2) $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble de ces matrices.

Une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite converger vers B matrice de $M_n(\mathbb{C})$ ssi les n^2 suites complexes définies par les coefficients des matrices A_p convergent vers les coefficients respectifs de B.

On montre aisément que si (A_p) et (A'_p) convergent vers B et B' alors les suites $(A_p+A'_p)$ et $(A_pA'_p)$ convergent respectivement vers $B+B'$ et BB'.

Enfin étant donné $A\in M_n(\mathbb{C})$ et $P=a_pX^p+\cdots+a_1X+a_0\in\mathbb{C}[X]$, on note $P(A)$ la matrice définie par $P(A)=a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0I_n\in M_n(\mathbb{C})$.

Préliminaire

Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{C})$. On note $X\in M_{n,1}(\mathbb{C})$ la colonne dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $AX=X$ ssi $\forall i\in\{1,2\dots,n\}$, $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$.
2. En déduire que $\mathcal{S}_n$ est stable pour le produit matriciel.

Partie I : Puissance des matrices stochastique d'ordre 2

La forme générale d'une matrice stochastique d'ordre 2 est $A=\begin{pmatrix}a & 1-a\\ 1-b & b\end{pmatrix}$ avec $a,b\in[0,1]$.

1. Calculer A^p dans les cas $a=b=1$ et $a=b=0$.
2. On suppose maintenant $(a,b)\neq(1,1)$ et $(a,b)\neq(0,0)$.

2.a Calculer $P(A)$ où $P=(X-1)(X-(a+b-1))$

2.b Exprimer le reste de la division euclidienne de X^p par P.

2.c En déduire l'expression de A^p en fonction de a,b et p.

2.d Montrer que la suite (A^p) converge vers une limite que l'on précisera.

Partie II : Exemple de calcul de puissances d'une matrice stochastique d'ordre 3

On considère E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 de la forme $M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$ avec (U,V).

1. Montrer que E un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$ dont on précisera une base et la dimension.
2. On note $U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $V=I-U$.

2.a Montrer que la famille (U,V) forme une base de E.
Quelles sont les coordonnées de $M(a,b)$ dans cette base ?

2.b Calculer U^2, V^2, UV et VU.

2.c Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ et $p\geq 1$, exprimer $(\alpha U+\beta V)^p$ en fonction de α,β,U,V et p.
En déduire l'expression de $M(a,b)^p$ en fonction de U et V.

3. A quelles conditions sur a et b, une matrice $M(a,b)$ de E appartient-elle à $\mathcal{S}_3$?
On suppose ces conditions remplies.
Montrer que la suite $(M(a,b)^p)$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie III : Matrice de permutation

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,2,\dots,n\}$. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on note $M_\sigma=(m_{i,j})\in M_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par : $m_{i,j}=\delta_{\sigma(i),j}=\begin{cases}1 & \text{si } j=\sigma(i)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. M_σ est appelée matrice de permutation associée à σ.

1. Justifier que les matrices de permutations sont stochastiques.

2. Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et σ un permutation de $\mathfrak{S}_n$.
Donner le terme général des matrices $B=M_\sigma A$ et $C=A^t M_\sigma$ en fonction du terme général $a_{i,j}$ de la matrice A. Comment interpréter les résultats obtenus en termes de permutation de lignes ou colonnes.

3. Soit $\sigma,\sigma'\in\mathfrak{S}_n$.Exprimer le produit $M_\sigma.M_{\sigma'}$ comme matrice associée à une permutation de $\mathfrak{S}_n$.
En déduire que M_σ est inversible et exprimer son inverse.

4. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. A quelle condition la suite (M_σ^p) converge-t-elle ?

Partie IV : Etude générale

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{S}_n$. On s'intéresse ici à l'éventuelle convergence de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$.
Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A^p.

1. Montrer que si la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B alors $B\in\mathcal{S}_n$ et $B^2=B$.

2. On suppose ici que pour tous $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, $a_{i,j}>0$.
On pose $\varepsilon=\min\{a_{i,j}\,/\,i,j\in\{1,2,\dots,n\}\}$.
Pour tout p dans $\mathbb{N}$ et tout j dans $\{1,2,\dots,n\}$, on note
$\alpha_j^{(p)}=\min\{a_{i,j}^{(p)}\,/\,i\in\{1,2,\dots,n\}\}$, $\beta_j^{(p)}=\max\{a_{i,j}^{(p)}\,/\,i\in\{1,2,\dots,n\}\}$ et $\delta_j^{(p)}=\beta_j^{(p)}-\alpha_j^{(p)}$.

2.a Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}$ et tout j dans $\{1,2,\dots,n\}$, on a :
$\alpha_j^{(p)}\leq\alpha_j^{(p+1)}\leq\beta_j^{(p+1)}\leq\beta_j^{(p)}$ et $\delta_j^{(p+1)}\leq(1-2\varepsilon)\delta_j^{(p)}$.

2.b En déduire que $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice B.

2.c Quelle particularité ont les lignes de B ?

Les matrices stochastiques interviennent en calcul de probabilité de la manière suivante :
Considérons un système à n états numérotés de 1 à n et notons $a_{i,j}$ la probabilité pour ce système de passer de l'état i à l'état j au bout d'un laps de temps donné.

La matrice $A=(a_{i,j})$ est alors une matrice stochastique, la condition $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$ signifiant que le système doit atteindre à partir de l'état i l'un des états $1,2,\dots,n$ donnés. Pour $p\in\mathbb{N}$, les coefficients de la matrices A^p permettent de voir les probabilités qui permettent de passe d'un état à un autre au bout de p laps de temps. La limite de (A^p), lorsqu'elle existe, donne une information sur le processus limite. Dans ce contexte, l'égalité des lignes de B signifie que l'état limite est indépendant de l'état initial.