Matrice circulante d'ordre 3

$M_3(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'anneau des matrices carrées réelles d'ordre 3.

On considère E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$.

On note $I=M(1,0,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J=M(0,1,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie I

1 Calculer J^2 et J^3. Justifier que J est inversible et déterminer J^{-1}.

2.a Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.

2.b Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $a',b',c'\in\mathbb{R}$. Calculer le produit $M(a,b,c)M(a',b',c')$.

2.c En déduire que E est un sous anneau commutatif de $M_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $M=M(a,b,c)$.

3.a Calculer $\det M$. A quelle condition M est elle inversible ?

On suppose cette condition remplie et on pose $N=M(x,y,z)$ avec $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

3.b Observer que $MN=I$ ssi (x,y,z) est solution d'un système de Cramer que l'on précisera.

3.c Résoudre ce dernier via les formules de Cramer.

Partie II

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}=(i,j,k)$.

Pour $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme dont la matrice représentative dans E est $M(a,b,c)$.

Lorsque $a=0,b=1,c=0$, on note $f=f_{a,b,c}$.

1.a Justifier que f est une rotation vectorielle et en préciser l'axe et l'angle.

1.b Décrire f^2.

2. Soit $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, $v=\frac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$ et $w=\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$.

2.a Justifier que $\mathcal{B}'=(u,v,w)$ est une base orthonormée directe de E.

2.b Former la matrice représentative de f et de f^2 dans $\mathcal{B}'$.

2.c On note $N(a,b,c)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_{a,b,c})$.

Exprimer $N(a,b,c)$.

3.a Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle ssi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$.

3.b Pour $m\in\mathbb{R}$, on pose $P_m(X)=X^3-X^2+m$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $m\in\mathbb{R}$, pour que le polynôme P_m admette trois racines réelles (éventuellement confondue).

3.c Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle ssi a,b et c sont les trois racines de P_m avec $m\in[0,4/27]$.