L'anneau des quaternions

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.
$M_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes.

On pose $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$.

Partie I : Etude d'une symétrie

Dans cette partie $M_2(\mathbb{C})$ est vu comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$.

Pour $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, on pose $\sigma(A)=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

1.a Montrer que σ est une symétrie du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.

1.b Etablir que (I,J,K,L) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$, puis donner la matrice de l'endomorphisme σ dans cette base.

2. On considère A et B dans $M_2(\mathbb{C})$.

2.a Montrer que $\sigma(AB)=\sigma(B)\sigma(A)$.

2.b Calculer $A\sigma(A)$.

2.c Justifier que si A est inversible alors $\sigma(A)$ l'est aussi et exprimer alors A^{-1} en fonction de la matrice $\sigma(A)$ et du complexe $\det A$.

3. Exprimer $\sigma(A)$ en fonction des matrices A et I et du complexe $\mathrm{tr}(A)$.

Partie II : Anneau des quaternions

Dans cette partie $M_2(\mathbb{C})$ est vu comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

Pour $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}=\begin{pmatrix}\overline{a}&\overline{b}\\\overline{c}&\overline{d}\end{pmatrix}$.

On désigne par H l'ensemble des matrices $A\in M_2(\mathbb{C})$ telle que $\sigma(A)={}^t\overline{A}$.

Les éléments de H sont appelés quaternions.

1.a Montrer que les matrices de H sont les matrices pouvant s'écrire : $\alpha I+\beta J+\gamma K+\delta L$ avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ des réels.

1.b En déduire que H est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$. Préciser une base et la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel H.

2.a Montrer que H est stable pour le produit matriciel.

2.b Calculer J^2,K^2,L^2, JK,KJ,KL,LK,LJ et JL.

2.c Conclure que H est un sous-anneau de l'anneau $(M_2(\mathbb{C}),+,\times)$. Le produit matriciel est-il commutatif sur H ?

3.a Vérifier que $\forall A\in H,\sigma(A)\in H$, $\mathrm{tr}\,A\in\mathbb{R}$ et $\det A\in\mathbb{R}^+$

3.b Montrer qu'une matrice non nulle de H est inversible et que son inverse est dans H.

Ce qui précède permet de dire que H est un corps non commutatif.

Partie III : Etude euclidienne

Pour A et B dans H, on pose : $(A\mid B)=\dfrac{1}{4}\mathrm{tr}(A\sigma(B)+B\sigma(A))$.

1. On considère A et B dans H.

1.a Prouver, sans calculs, que $(A \mid B) \in \mathbb{R}$.

1.b Montrer que $(A \mid A) = \det A$.

1.c Etablir que $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H .

2. Vérifier que (I, J, K, L) est une base orthonormée de H .

3. On pose $D = \text{Vect}(I)$ et $F = \{A \in H / \text{tr}\, A = 0\}$.
D est appelée droite des réels et F espace des quaternions purs.

3.a Montrer que F est un hyperplan du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H dont D est la droite normale.
Donner une base orthonormée de F .

3.b On désigne par r la projection orthogonale sur $D = \text{Vect}(I)$ et v celle sur F .
Pour $A \in H$, exprimer $r(A)$ et $v(A)$ en fonction de A , de I et du réel $\text{tr}(A)$.

3.c Observer que σ est une symétrie orthogonale d'axe D .
Pour tout $A \in H$, $\sigma(A)$ est appelé conjugué du quaternion A .

4. On oriente l'espace F de sorte que la famille (J, K, L) soit directe.
Montrer que pour tout $A, B \in H$, on a :
$r(AB) = r(A)r(B) - (v(A) \mid v(B))I$ et $v(AB) = r(A)v(B) + r(B)v(A) + v(A) \wedge v(B)$.