Itérés d'un endomorphisme

Dans ce problème E désigne un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et I l'endomorphisme identité de E.

On considère f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f^2 = \frac{1}{2}(f+I)$.

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, peut-on avoir $f = \alpha.I$?

2. On revient au cas général.

2.a Prouver que l'endomorphisme f est inversible et exprimer son inverse f^{-1} en fonction de I et de f.

2.b Justifier que $\ker(f-I)$ et $\ker(f+\frac{1}{2}.I)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

2.c Montrer que $E = \ker(f-I) \oplus \ker(f+\frac{1}{2}.I)$.

2.d Calculer $(f+\frac{1}{2}I)\circ(f-I)$.

En déduire que $\ker(f+\frac{1}{2}.I) = \mathrm{Im}(f-I)$.

2.e De même, justifier que $\ker(f-I) = \mathrm{Im}(f+\frac{1}{2}I)$.

3. On suppose ***<u>désormais</u>*** que les endomorphismes f et I sont linéairement indépendants.

3.a Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de f et I.

3.b Etablir que, pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de réels et un seul tel que
$f^n = a_n.f + b_n.I$.
Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

3.c Former une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n .

En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

3.d On convient d'appeler limite de $f^n = a_n.f + b_n.I$ l'endomorphisme $p = \frac{2}{3}.f + \frac{1}{3}.I$.

Justifier que p est la projection vectorielle sur $\ker(f-I)$ et parallèlement à $\mathrm{Im}(f-I)$.

4. On forme $\mathcal{M} = \left\{\lambda.f + \mu.I \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

4.a Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

4.b En déterminer une base et la dimension.