Inversion d'une matrice

L'objectif de ce problème est l'obtention d'une méthode permettant d'inverser certaines matrices symétriques réelles.

Préliminaire

Soit $D \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts.

Montrer que si une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ commute avec D alors M est diagonale.

Partie I

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle inversible.

On suppose qu'il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux distincts telles que $AP = PD$.

1. Etablir ${}^tPA = D\,{}^tP$.

2 En exploitant le préliminaire, établir que ${}^tPP$ est une matrice diagonale que l'on notera Δ.

3. On note $p_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de P et δ_k le k ème coefficient diagonal de Δ.

3.a Exprimer δ_k à l'aide d'un symbole sommatoire et des $p_{i,j}$.

3.b On suppose désormais qu'aucune colonne de P n'est nulle.
Justifier que Δ, P et D sont inversibles.

4.a Exprimer l'inverse de A en fonction de $P, {}^tP, \Delta^{-1}$ et D^{-1}.

4.b On note λ_k le k ème coefficient diagonal de la matrice D.

On note $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les coefficients d'indice (i,j) des matrices A et A^{-1}.

Etablir $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{i,k}p_{j,k}}{\lambda_k \delta_k}$.

Partie II

On considère ici la matrice symétrique : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. On pose $D_n = \det A$.

1.a Former une relation de récurrence engageant D_n, D_{n-1} et D_{n-2}.

1.b Donner l'expression de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.c La matrice A est-elle inversible ?

Saut de page

2. Soit k un entier tel que $1 \le k \le n$.

2.a Justifier, pour tout $1 \le i \le n$, la relation :

$$\sin\left(\frac{(i-1)k\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{(i+1)k\pi}{n+1}\right) = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right).$$

2.b On note : $X_k = \left(\sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\right)_{1\leq i\leq n} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Observer qu'il existe un réel λ_k tel que $AX_k = \lambda_k X_k$ et exprimer ce dernier.

2.c On note P la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Observer qu'il existe une matrice diagonale D telle que

a) $AP = PD$

b) les coefficients diagonaux de D sont deux à deux distincts.

3. On peut désormais reprendre les notations de la partie I

3.a Expliciter $p_{i,j}$.

3.b Ici x désigne un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

Justifier la relation : $\sum_{p=1}^{n}\cos 2px = \frac{\sin nx}{\sin x}\cos(n+1)x$.

En déduire une expression en fonction de n et x de la somme : $S_n(x) = \sum_{p=1}^{n}\sin^2 px$.

3.c Observer que la valeur de δ_k ne dépend pas de k et donner celle-ci.

4. En déduire le coefficient de la ligne i et de la colonne j de l'inverse de A .