Etude d'une famille de suites récurrentes

Dans tout ce problème a désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

La partie I étudie le cas où P est constant.
La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.
La partie III étudie le cas où $a = 1$.

Partie I

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\right\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.
   Montrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

2.a Déterminer $E_1^{(0)}$.

2.b Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.

3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

4. Soit x la suite constante égale à 1 (pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n = 1$) et soit y la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
   Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.

5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.

5.a Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$.

5.b Montrer que pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$,
   $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$.

5.c Que peut-on en conclure ?

6. Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degrés inférieurs ou égaux à p.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)\right\}$

1.a On considère l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par : $\varphi(P) = \big(P(0), P(1), \dots, P(p)\big)$).
   Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels.

1.b Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$.
   Montrer l'unicité de P. On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

3. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4. Déterminer $\ker\theta$ (noyau de θ).

5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

5.a Quel est le degré de Q_k ?

5.b Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6.a Montrer que pour tout k dans $\{0,1,\ldots,p\}$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im}\theta$.

6.b Que peut-on en conclure ?

7. Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

8. Pour $k \in \{0,1,\ldots,p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $x_n^{(k)} = n^k$.

   On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.

   Montrer que $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

9. Application : déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 2n + 5 \\ u_0 = -2 \end{cases}.$$

Partie III

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; \exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + P(n) \right\}.$$

2. Application : déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ u_0 = -2 \end{cases}.$$